

Dev n° 18Titre: $\mathcal{L}$ muni de $\|\cdot\|_{\infty}$ est un Banach.Prop:

$$\mathcal{L} = \{ f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lip.} \}$$

$$\|f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|.$$

Alors, $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\infty})$ est Banach.Demo:* P.q. $(\mathcal{L}, \|\cdot\|_{\infty})$ est un e.v.n. $\Rightarrow \|f\|_{\infty} \in \mathbb{R}^+$ ok.

$$\Rightarrow \|0\|_{\infty} = 0 \Leftrightarrow \sup_{x \in [0,1]} |0(x)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{0(x) - 0(y)}{x - y} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 0.$$

 $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}.$

$$\|\lambda f\|_{\infty} = \sup_{x \in [0,1]} |\lambda f(x)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{\lambda f(x) - \lambda f(y)}{x - y} \right|$$

$$= |\lambda| \|f\|_{\infty}$$

 $\Rightarrow f$ et g lip et $[0,1] \rightarrow \mathbb{R}.$ $x \in [0,1]$

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$$

$$\leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)| \quad \left. \begin{array}{l} \text{Comme vraie } \forall x \in [0,1] \\ \text{et } f \text{ et } g \text{ continues sur compact.} \end{array} \right\}$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in [0,1]} |f(x) + g(x)| \leq \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{x \in [0,1]} |g(x)|$$

Et par $x \neq y$:

$$\frac{|f(x) - g(x) - f(y) + g(y)|}{|x - y|} \leq \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}$$

$$\leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}$$

) car $(f+g)$ lip.

$$\Rightarrow \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - g(x) - f(y) + g(y)|}{|x - y|} \leq \sup_{x \neq y} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} + \sup_{x \neq y} \frac{|g(x) - g(y)|}{|x - y|}$$

Donc, en combinant on obtient le résultat.

* P.q. complet:

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall p, q \geq N$,

$$\|f_p - f_q\|_{\infty} = \sup_{x \neq y} \frac{|f_p(x) - f_q(x) - f_p(y) + f_q(y)|}{|x - y|} < \varepsilon.$$

En particulier, $\|f_p - f_q\|_{\infty} < \varepsilon$. Donc $(f_n)_n$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_{\infty})$. Donc, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers $f \in \mathcal{C}([0,1])$ pour $\|\cdot\|_{\infty}$.De plus, $\forall p, q \geq N$, $\forall x, y \in [0,1]$, $\frac{|(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(y) - f_q(y))|}{|x - y|} < \varepsilon$

$(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$. Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers $f \in \mathcal{C}([0,1])$ pour $\|\cdot\|_\infty$.
De plus, $\forall p, q \geq N$, $\forall x, y \in [0,1]$, $\frac{|(f_p(x) - f_q(x)) - (f_p(y) - f_q(y))|}{|x-y|} < \varepsilon$

Pour $q \rightarrow +\infty$, $\frac{|f_p(x) - f(x) - (f_p(y) - f(y))|}{|x-y|} \leq \varepsilon \Rightarrow \sup_{x \neq y} " \leq \varepsilon$.

Donc $f_p - f$ est lip. Comme de plus, $\forall p \geq N$, $\|f_p - f\|_\infty \leq \varepsilon$ et $\forall p \geq N$, $\|f_p - f\| \leq 2\varepsilon$.
Donc $f = f_p - (f_p - f)$ est lip. et $f_p \rightarrow f$ dans $\mathcal{X}$. $\square$

Application:

$S_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx)$. P.q suite bornée dans $\mathcal{X}$ et étudier sa convergence.

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{n} \times 1 = \frac{1}{n}.$$

$$\|S_n(x)\|_{\mathcal{X}} = \frac{1}{n} + \sup_{x \neq y} \frac{1}{n} \left| \frac{\sin(nx) - \sin(ny)}{x-y} \right| < +\infty.$$

$$S'_n(x) = \cos(nx) \quad \leftarrow \text{fonct continue sur un compact.} \quad \sup = 1.$$

De plus, (S_n) cv unif vers 0.

$$\sup_{x \neq y} \frac{|(S_n(x) - 0) - (S_n(y) - 0)|}{|x-y|} \geq \frac{|S_n(\frac{\pi}{2n}) - S_n(0)|}{|\frac{\pi}{2n} - 0|} \geq \frac{2}{\pi}$$

Donc $\|S_n - 0\|_{\mathcal{X}} \geq \frac{2}{\pi}$ donc $(S_n)_n$ ne cv pas vers 0 dans $\mathcal{X}$.
donc $(S_n)_n$ ne converge pas dans $\mathcal{X}$.

Cette suite est unif cv mais pas cv au sens de $\mathcal{X}$.

La morale est que $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$ ne sont pas deux normes équivalentes.

Annexe:

• Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}$ vérifiant $\sup_n \|f_n\|_{\mathcal{L}} < +\infty$.

On peut extraire une sous-suite uniformément convergente.

• Est-ce que $\mathcal{L}$ est un fermé de $(\mathcal{C}^0([0,1]), \|\cdot\|_\infty)$?

Non car $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{L}$ avec $f_n(x) = \sqrt{x + \frac{1}{n}}$ cv vers $f = \sqrt{x}$ mais $f \notin \mathcal{L}$.

• Convergence unif.:

$\forall x \in [0,1]$:

$$\left| \sqrt{x + \frac{1}{n}} - \sqrt{x} \right| = \left| \frac{x + \frac{1}{n} - x}{\sqrt{x + \frac{1}{n}} + \sqrt{x}} \right| \leq \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

• $f_n \in \mathcal{L}$ car les f_n sont $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ (on utilise le TAF)

$$\Rightarrow \sup_{x \neq y} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{|x-y|} \leq \|f'_n\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{1}{2} \left(x + \frac{1}{n}\right)^{-1/2} \right| < +\infty.$$

• $\forall n \in \mathbb{N}$ $\dots$

$$\frac{x+y}{x-y} \quad |x-y|$$

$$x \in [0,1]$$

- V-a-t-il une norme équivalente à $\|\cdot\|_L$?

Oui par exemple $N_1(F) = |F(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|}$.

On a $N_1(\cdot) \leq \|\cdot\|_L \leq 2N_1(\cdot)$.

- $|F(0)| \leq \|F\|_\infty \Rightarrow N_1 \leq \|\cdot\|_L$.

- $\|F\|_\infty \leq |F(0)| + \sup_{x \neq y} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|}$ car F est lip.

$$\Rightarrow \|F\|_L \leq |F(0)| + 2 \sup_{x \neq y} \frac{|F(x) - F(y)|}{|x - y|} \leq 2 N_1(F)$$

$\mathcal{X}$ est un Banach

10

Prop:

$\mathcal{X} = \{f: [0,1] \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ lip.}\}$

Soit $f \in \mathcal{X}$, on note $\| \cdot \|_{\mathcal{X}} = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)| + \sup_{\substack{x \neq y \\ x,y \in [0,1]}} \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|}$

Alors, $(\mathcal{X}, \| \cdot \|_{\mathcal{X}})$ est un Banach.

Démo:

Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{X}$.

Soit $\varepsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall p, q \geq N$, on a

$$\|f_p - f_q\|_{\mathcal{X}} = \|f_p - f_q\|_{\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|f_p(x) - f_q(x) - f_p(y) + f_q(y)|}{|x - y|} < \varepsilon$$

En particulier,

$$\|f_p - f_q\|_{\infty} < \varepsilon.$$

Donc, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathcal{C}([0,1]), \| \cdot \|_{\infty})$ qui est complet.

Donc, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers $f \in \mathcal{C}([0,1])$ pour $\| \cdot \|_{\infty}$.

De plus, $\forall p, q \geq N$ et $x, y \in [0,1]; x \neq y$:

$$\frac{|f_p(x) - f_q(x) - f_p(y) + f_q(y)|}{|x - y|} < \varepsilon$$

En faisant tendre q vers $+\infty$, on a:

$$\frac{|f_p(x) - f(x) - f_p(y) + f(y)|}{|x - y|} \leq \varepsilon$$

En passant au sup:

$$\sup_{x \neq y} \frac{|f_p(x) - f(x) - f_p(y) + f(y)|}{|x - y|} \leq \varepsilon$$

Donc, $\|f_p - f\|_{\mathcal{X}} < 2\varepsilon, \forall p \geq N$.

Donc, $f_p - f$ est dans $\mathcal{X}$ et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{X}$ vers f .

De plus, $f = \underbrace{f_p}_{\in \mathcal{X}} - \underbrace{(f_p - f)}_{\in \mathcal{X}} \in \mathcal{X}$

Donc, $(\mathcal{X}, \| \cdot \|_{\mathcal{X}})$ est complet $\square$

Application:

Soit $S_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1]$.

P.q. $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée dans $\mathcal{X}$ et étudions sa convergence.

On a:

$$\bullet \quad |S_n(x)| \leq \frac{1}{n} \times 1 < 1, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

$$\text{On a } S_n'(x) = \cos(nx) \leadsto \|S_n'\|_{\infty} = 1.$$

Par le TAF on a que:

$$\|S_n\|_{\mathcal{X}} \leq 1 + 1 = 2.$$

Donc, S_n borné dans $\mathcal{X}$.

• On remarque que S_n cv unif. vers la fonction nulle.

On a:

$$\sup_{x \neq y} \frac{|S_n(x) - 0 - S_n(y) + 0|}{|x - y|} \geq \frac{|S_n(\pi/2n) - S_n(0)|}{|\pi/2n - 0|} = \frac{2}{\pi}$$

Donc, $\|S_n - 0\|_{\mathcal{X}} \geq 2/\pi$.

Donc, (S_n) ne converge pas dans $\mathcal{X}$.

• CCL: $\| \cdot \|_{\mathcal{X}}$ et $\| \cdot \|_{\infty}$ ne sont pas équivalentes